Tentamen Statistische Fysica 23-06-2008

Opgave 1

Een systeem met volume V en N deeltjes is in contact met een warmtebad. De energie van het systeem wordt aangeduid met E_r. De mogelijke E_r vormen een klassiek continuum: met E_r worden alle energieën tussen E_r en $E_r + \delta E_r$ bedoeld. De ontaardingsgraad van E_r wordt aangeduid met $g(E_r)$.
De kans dat het systeem de energie E_r heeft wordt gegeven door:

$$p(E_r) = \frac{\Omega_1(E_r)\Omega_2(E_0 - E_r)}{\Omega_0}$$

Hierin is:
$\Omega_1(E_r)$: het aantal microtoestanden van het systeem met energie E_r.
$\Omega_2(E_0\text{-}E_r)$: het aantal microtoestanden van het warmtebad waarbij het systeem de energie E_r heeft.
Ω_0 : alle microtoestanden van systeem + warmtebad.
E_0 : de totale energie van systeem + warmtebad.

a) Maak plausibel dat de gegeven formule op basis van fundamentele postulaten de juiste vorm heeft.

b) Laat zien dat $p(E_r)$ geschreven kan worden als: $p(E_r) = \frac{g(E_r)e^{-\frac{E_r}{kT}}}{Z}$, waarin Z de toestandssom voorstelt.

c) Laat zien dat de gemiddelde energie van het systeem gegeven wordt door:
$\overline{E} = -\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta}$

Opgave 2

Een systeem met N deeltjes heeft een niet ontaarde grondtoestand en een tweevoudig ontaarde aangeslagen toestand met energie Δ. In de aangeslagen toestand hebben de deeltjes een magnetisch moment μ. Het systeem is in contact met een warmtebad met temperatuur T.

a) Laat zien dat het aantal deeltjes n dat zich in de aangeslagen toestand bevindt gegeven wordt door $n = \frac{2N}{\left(2 + e^{\Delta/kt}\right)}$

b) De deeltjes die zich in de aangeslagen toestand bevinden kunnen worden opgevat als een paramagnetisch (sub)systeem.
Laat zien dat de magnetisatie van dit subsysteem in een magnetisch veld B gegeven wordt door: $M = \frac{n\mu}{V}\tanh\left(\frac{\mu B}{kT}\right)$

c) Neem aan dat $\mu B << kT$.
In deze situatie heeft de susceptibiliteit $\chi = \frac{\mu_0 M}{B}$ een maximum bij de temperatuur $T = a\Delta/k$. (μ_0 is de permeabiliteit van het vacuüm.)
Geef een numerieke schatting voor a.

Opgave 3

De dampdruk van H_2 wordt gegeven door de vergelijking: $P = P_0 \exp\left(-\frac{L_{vap}}{RT}\right)$

Bereken de helling van de dampspanningskromme $\frac{dP}{dT}$ voor vast H_2 bij het tripelpunt T_{tr}.
Aangenomen mag worden dat de damp kan worden beschreven met de ideale gaswet.

Gegevens:
$P_0 = 90$ MPa; $T_{tr} = 14$ K;
$L_{vap} = 1010$ J/mol (verdampingswarmte); $L_{sub} = 1172$ J/mol (sublimatiewarmte)

Opgave 4
Beschouw een klassiek tweedimensionaal gas, bestaande uit N deeltjes met massa m zonder interne structuur. Het 'volume' van dit gas wordt gegeven door het oppervlak A.

a) Laat zien dat de eendeeltjes toestandssom van dit gas gegeven wordt door

$$Z_1^{tr} = A\left(\frac{2\pi mkT}{h^2}\right).$$

Hint: De eendeeltjes toestandsdichtheid van een driedimensionaal gas wordt gegeven door $f(p)dp = \frac{V\,4\pi p^2 dp}{h^3}$.

Bedenk zelf hoe de toestandsdichtheid er uit moet zien in twee dimensies.

b) Laat zien dat de Maxwell distributie voor dit tweedimensionale gas gegeven wordt door

$$P(v)dv = \frac{mv}{kT} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv$$

c) Bereken de meest waarschijnlijke snelheid van de deeltjes in dit gas.

d) Bereken de gemiddelde snelheid van de deeltjes in dit gas.

Opgave 5
Beschouw een (driedimensionaal) gas van vrije electronen

a) Maak aannemelijk dat het totale aantal deeltjes geschreven kan worden als:

$$N = \frac{4\pi V}{h^3}(2m)^{3/2}\int_0^\infty \frac{\varepsilon^{1/2} d\varepsilon}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)}+1}$$

b) De Fermi energie is gedefinieerd als de chemische potentiaal $\mu(T)$ bij $T = 0$: $\varepsilon_F \equiv \mu(0)$. Men kan aantonen (hoeft hier niet) dat $\varepsilon_F > 0$.

Laat zien dat $\varepsilon_F = \frac{h^2}{2m}\left(\frac{3N}{8\pi V}\right)^{2/3}$

c) Bereken bij $T = 0$ de gemiddelde energie van een elektron in termen van de Fermi energie.

d) De Fermi energie kan geassocieerd worden met de zgn. Fermi temperatuur T_F. Verklaar (in woorden) waarom de gemiddelde kinetische energie van de elektronen in het vrije elektronengas verschilt van nul bij $T = 0$.

Physical contants:

Getal van Avogadro: $N_A = 6{,}02 \times 10^{23}\ mol^{-1}$

Constante van Planck: $h = 6{,}626 \times 10^{-34}$ Js

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1{,}055 \times 10^{-34} \text{ Js}$$

Constante van Boltzmann: $k = 1{,}381 \times 10^{-23}\ J\ K^{-1}$

Gasconstante: $R = 8{,}31\ J\ mol^{-1}\ K^{-1}$

Lichtsnelheid: $c = 3 \times 10^{8}\ m\ s^{-1}$

Rustmassa elektron $m_e = 9{,}11 \times 10^{-31}$ kg

Rustmassa proton $m_p = 1{,}67 \times 10^{-27}$ kg

Bohr magneton $\mu_B = 9{,}27 \times 10^{-24}\ A\ m^2$

Integrals:

n	$\int_0^\infty dx\, x^n e^{-ax^2} \quad (a > 0)$	$\int_0^\infty \frac{x^n dx}{e^x - 1}$	$\int_0^\infty \frac{x^n dx}{e^x + 1}$	$\int_0^\infty \frac{x^n e^x}{(e^x - 1)^2}$	$\int_0^\infty x^n \ln(1 - e^{-x}) dx$
0	$\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{\pi}{a}\right)}$	diverges	$^{10}\log 2$	diverges	$-\frac{\pi^2}{6}$
1/2	$\frac{0{,}6127}{a^{3/4}}$	$2{,}612\ \frac{\sqrt{\pi}}{2}$	0,6781	diverges	$-1{,}341\ \frac{\sqrt{\pi}}{2}$
1	$\frac{1}{2a}$	$\frac{\pi^2}{6}$	$\frac{\pi^2}{12}$	diverges	-1,202
3/2	$\frac{0{,}4532}{a^{5/4}}$	$1{,}341\ \frac{3\sqrt{\pi}}{4}$	1,153		$-1{,}127\ \frac{3\sqrt{\pi}}{4}$
2	$\frac{1}{4a}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$	2,404	1,803	$\frac{\pi^2}{3}$	$-\frac{\pi^2}{45}$
5/2	$\frac{1{,}662}{a^{7/4}}$	$1{,}127\ \frac{15\sqrt{\pi}}{8}$	3,083		-3,505
3	$\frac{1}{2a^2}$	$\frac{\pi^4}{15}$	$\frac{7\pi^4}{120}$	7,212	-6,221
7/2	$\frac{0{,}5665}{a^{9/4}}$	12,268	11,184		
4	$\frac{3\sqrt{\pi}}{8a^{5/2}}$	24,886	23,331	$\frac{4\pi^4}{15}$	